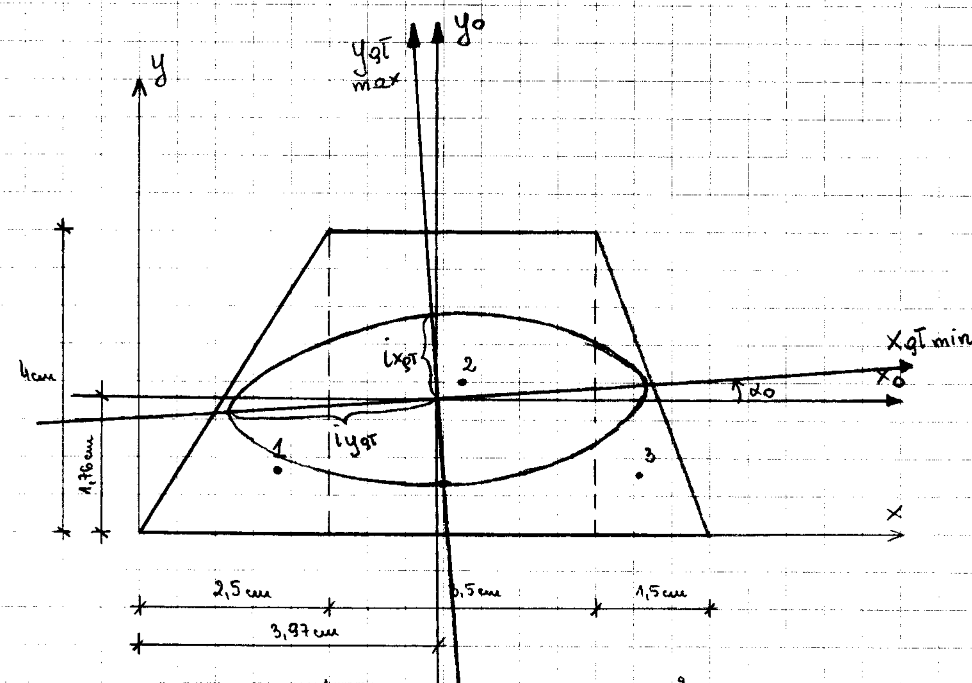
Dla podanej figury wyznaczyć środkową elipsę bezwładności



$$A = \frac{1}{2}\cdot 2{,}5cm\cdot 4cm + 3{,}5cm\cdot 4cm + \frac{1}{2}\cdot 1{,}5cm\cdot 4cm = 22\ cm^2$$

$$S_x = 5cm^2\cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot 4cm\right)}_{=\frac{4}{3}cm} + 14cm^2\cdot 2cm + 3cm^2\cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot 4cm\right)}_{=\frac{4}{3}cm} = 38{,}67\ cm^3$$

$$S_y = 5cm^2\cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot 2{,}5cm\right)}_{=1{,}67cm} + 14cm^2\cdot 4{,}25cm + 3cm^2\cdot 6{,}5cm = 87{,}33\ cm^3$$

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{87{,}33\ cm^3}{22\ cm^2} = 3{,}97\ cm$$

$$y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{38{,}67\ cm^3}{22\ cm^2} = 1{,}76\ cm$$

$$J_{x_0} = \left[\frac{2{,}5cm\cdot(4cm)^3}{36} + \left(\frac{4}{3}cm - 1{,}76cm\right)^2\cdot 5cm^2\right] + \left[\frac{3{,}5cm\cdot(4cm)^3}{12} + (2cm - 1{,}76cm)^2\cdot 14cm^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{1{,}5cm\cdot(4cm)^3}{36} + \left(\frac{4}{3}cm - 1{,}76cm\right)^2\cdot 3cm^2\right] = 28{,}04\ cm^4$$

$$J_{y_0} = \left[\frac{(2{,}5cm)^3\cdot 4cm}{36} + (1{,}67cm - 3{,}97cm)^2\cdot 5cm^2\right] + \left[\frac{(3{,}5cm)^3\cdot 4cm}{12} + (4{,}25cm - 3{,}97cm)^2\cdot 14cm^2\right] +$$
$$+ \left[\frac{(1{,}5cm)^3\cdot 4cm}{36} + (6{,}5cm - 3{,}97cm)^2\cdot 3cm^2\right] = 63{,}15\ cm^4$$

$$J_{x_0y_0} = \left[\frac{(2{,}5cm)^2\cdot(4cm)^2}{72} + \left(\frac{4}{3}cm - 1{,}76cm\right)\cdot(1{,}67cm - 3{,}97cm)\cdot 5cm^2\right] + \Big[0 + (2cm - 1{,}76cm)\cdot$$
$$\cdot (4{,}25cm - 3{,}97cm)\cdot 14cm^2\Big] + \left[-\frac{(1{,}5cm)^2\cdot(4cm)^2}{72} + \left(\frac{4}{3}cm - 1{,}76cm\right)(6{,}5cm - 3{,}97cm)\cdot 5cm^2\right] =$$
$$= 1{,}34\ cm^4$$

Wyznaczenie kąta nachylenia osi głównych

$$tg\, 2\alpha_0 = \frac{-2\cdot J_{x_0y_0}}{J_{x_0} - J_{y_0}} = 0{,}07633$$

$$2\alpha_0 = 4{,}36^\circ \qquad \alpha_0 = 2{,}18^\circ$$

Wyznaczenie głównych momentów bezwładności

$$J_{max,min} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4(J_{x_0 y_0})^2}$$

$J_{max} = 63,20\ cm^4$ – moment bezwładności dla osi $y_{gł}$ (oś $y_{gł}$ jest max)

$J_{min} = 27,99\ cm^4$ – moment bezwładności dla osi $x_{gł}$ (oś $x_{gł}$ jest min)

Sprawdzenie:

1) $J_{x_0} + J_{y_0} = J_{max} + J_{min}$

$28,04\ cm^4 + 63,15\ cm^4 = 63,20\ cm^4 + 27,99\ cm^4$

$91,19\ cm^4 = 91,19\ cm^4$

2) $J_{x_{gł} y_{gł}} = 0$

$$J_{x_{gł} y_{gł}} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + J_{x_0 y_0} \cdot \cos 2\alpha_0 = \frac{28,04\ cm^4 - 63,15\ cm^4}{2} \cdot \sin 4,36^\circ +$$
$$+ 1,34\ cm^4 \cdot \cos 4,36^\circ = -17,555\ cm^4 \cdot 0,076 + 1,34\ cm^4 \cdot 0,9971 =$$
$$= -1,33458\ cm^4 + 1,33612\ cm^4 = 0,00154\ cm^4 \approx 0$$

Wyznaczenie głównych promieni bezwładności

$$i_{x_{gł}} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{27,99\ cm^4}{22\ cm^2}} = 1,13\ cm$$

$$i_{y_{gł}} = \sqrt{\frac{J_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{63,20\ cm^4}{22\ cm^2}} = 2,87\ cm$$

Promień $i_{x_{gł}}$ odkładamy na osi $y_{gł}$.

Promień $i_{y_{gł}}$ odkładamy na osi $x_{gł}$.